

LOST IN SPACE MANŒUVRE ET RENDEZ-VOUS EN ORBITE

R. LEHOUCQ – FESTIVAL D’ASTRONOMIE DE FLEURANCE 2018

Ce fil rouge sera consacré à la manœuvre orbitale et à la procédure pour opérer un rendez-vous entre deux objets évoluant sur des orbites proches. Il s’agit de la présentation détaillée d’une analyse réalisée pour la conférence intitulée “Gravity sans pesanteur” donnée au festival de Fleurance en 2014. Il s’agissait de déterminer comment Ryan Stone pouvait aborder la station orbitale chinoise Tiangong-1 grâce à une habile manoeuvre de son module Soyouz propulsé par ses rétrofusées d’atterrissage. Nous commencerons par des rappels sur l’orbite elliptique, puis traiterons de quelques manoeuvre orbitales classiques avant de finir par la question du rendez-vous orbital. Des exemples numériques sont donnés pour montrer la procédure à suivre dans chaque situation.

1. RAPPELS SUR L’ORBITE ELLIPTIQUE

Le mouvement orbital d’un engin spatial résulte de l’attraction gravitationnelle de la Terre. La position géocentrique \mathbf{r} de l’engin est régie par la relation fondamentale de la dynamique (seconde loi de Newton)

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r}$$

où l’on pose $\mu = GM_{\oplus} = 398\,600 \text{ km}^3 \text{ s}^{-2}$. La force gravitationnelle étant centrale, le moment cinétique par unité de masse $\mathbf{h} = \mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}$ est conservé au cours du temps : le mouvement s’effectue donc dans un plan perpendiculaire à \mathbf{h} . On peut aussi montrer que le vecteur de Runge-Lenz (par unité de masse) défini par

$$(1.1) \quad \mathbf{L} = \dot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{h} - \mu \frac{\mathbf{r}}{r}$$

est une autre quantité conservée au cours du mouvement. Le produit scalaire de ce vecteur avec le moment cinétique \mathbf{h} étant nul, \mathbf{L} est contenu dans le plan orbital. Le vecteur excentricité défini par $\mathbf{e} = \mathbf{L}/\mu$ porte la ligne des apsides qui joint l’apogée et le périégée. En réarrangeant l’équation (1.1) et en en prenant le produit scalaire par le vecteur \mathbf{r} on obtient

$$\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{r} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = \frac{\mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{h})}{\mu}$$

Sachant que $\mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{h}) = \mathbf{h} \cdot (\mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} = h^2$, on obtient

$$r + \mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = \frac{h^2}{\mu}$$

Si l'on note θ l'angle entre la direction fixe portée par le vecteur excentricité \vec{e} et la position \mathbf{r} (voir figure 1), l'équation précédente conduit à l'équation du mouvement

$$r = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + e \cos \theta}$$

Si $0 < e < 1$ le dénominateur n'est jamais nul et le mouvement est elliptique (première loi de Kepler). La distance r entre l'engin et le centre attracteur est donc bornée entre deux valeurs atteintes quand $\theta = 0^\circ$ (périgée) et $\theta = 180^\circ$ (apogée)

$$(1.2) \quad r_p = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + e} \quad \text{et} \quad r_a = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 - e}$$

Cela permet de définir le demi-grand axe de l'ellipse orbitale

$$(1.3) \quad a = \frac{1}{2} (r_a + r_p) = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 - e^2}$$

et de réécrire l'équation du mouvement sous sa forme canonique

$$(1.4) \quad r = a \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \theta}$$

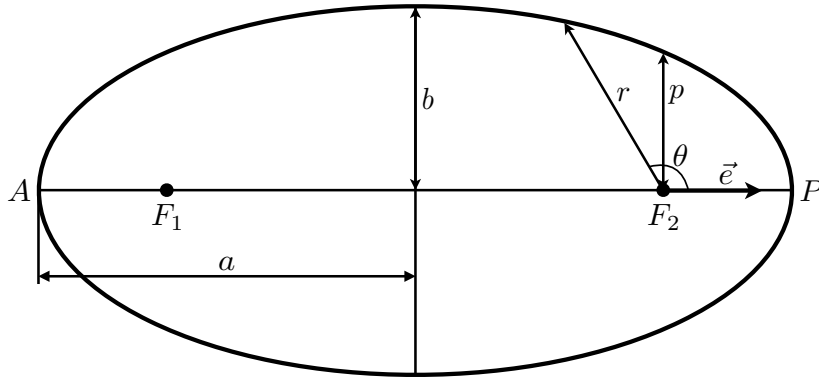


FIGURE 1. Définition des paramètres d'une orbite elliptique.

L'équation (1.2) permet d'obtenir une relation liant h et e à l'apogée et au périgée

$$(1.5) \quad \frac{h^2}{2\mu} = \frac{r_a r_p}{r_a + r_p} \quad \text{et} \quad e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$$

L'énergie mécanique totale par unité de masse définie par

$$\varepsilon = \frac{1}{2} v^2 - \frac{\mu}{r}$$

est la troisième quantité conservée durant le mouvement. Cette constante du mouvement s'évalue par exemple au périgée où $r = r_p$ et la vitesse radiale est nulle (comme à l'apogée d'ailleurs). Du coup, $h \equiv r_p v_\perp = r_p v_p$ ce qui conduit à

$$(1.6) \quad \varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{r_p} \right)^2 - \frac{\mu}{r_p} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{h} \right)^2 (1 - e^2) = -\frac{\mu}{2a}$$

Cela montre que l'énergie totale par unité de masse ne dépend que du demi-grand axe de l'ellipse. Enfin, la conservation du moment cinétique implique que la vitesse aréolaire $h/2$ est constante (deuxième loi de Kepler) ce qui permet d'écrire

$$\frac{\pi ab}{T} = \frac{h}{2}$$

où $b = a\sqrt{1-e^2}$ est le demi petit axe de l'ellipse et T la période du mouvement. La manipulation de cette relation conduit à la troisième loi de Kepler

$$(1.7) \quad \frac{a^3}{T^2} = \frac{\mu}{4\pi^2}$$

2. MANŒUVRES ORBITALES

Les manœuvres orbitales permettent de faire passer un engin spatial d'une orbite à une autre. Ces changements d'orbite peuvent être de grande amplitude, comme lorsque l'engin passe d'une orbite basse à une trajectoire interplanétaire. Ils peuvent aussi être d'amplitude plus faible, comme par exemple durant les étapes finales du rendez-vous d'un vaisseau spatial avec un autre. Le changement d'orbite nécessite le déclenchement de propulseurs embarqués, soit en propulsion, soit en rétro-propulsion. Dans cette partie, nous nous intéresserons principalement aux manœuvres dites impulsives, au cours desquelles les propulseurs fonctionnent pendant une durée très courte par rapport à durée caractéristique du mouvement (période orbitale par exemple). On supposera donc que le changement de vitesse durant la manœuvre, noté Δv , est instantané.

2.1. Transfert de Hohmann. Le transfert Hohmann est la manœuvre à deux impulsions la plus économe en énergie pour passer d'une orbite circulaire à une autre située dans le même plan. L'orbite de transfert est une ellipse tangente au deux cercles sur leur ligne d'apsides commune (voir figure 2). Le périégée et l'apogée de cette ellipse sont respectivement égaux aux rayons des cercles intérieur et extérieur. Bien sûr, seule une moitié de l'ellipse est parcourue durant la manœuvre, qui peut se faire indifféremment du cercle intérieur vers le cercle extérieur ou inversement.

L'équation (1.6) montre que l'énergie mécanique totale d'une orbite ne dépend que du demi-grand axe de celle-ci. Cela signifie que pour passer d'une orbite circulaire de rayon r_1 à une autre de rayon r_2 , comme représenté sur la figure 2, il faut augmenter l'énergie totale du véhicule. En partant du point A situé sur le cercle intérieur, il faut donner un incrément de vitesse Δv_A dans le sens du mouvement orbital circulaire pour passer sur une orbite elliptique de demi-grand axe a supérieur au rayon r_1 . Arrivé au point B , le véhicule doit encore subir un incrément de vitesse Δv_B dans le sens du mouvement orbital pour se placer sur l'orbite circulaire de rayon r_2 dont l'énergie totale est encore plus élevée. Sans cette deuxième impulsion, le véhicule continuera à suivre l'orbite elliptique de Hohmann.

S'il s'agit de passer de l'orbite extérieure à l'orbite intérieure, il suffit d'appliquer un décrétement de vitesse Δv_B au point B (i.e. d'utiliser des rétrofusées) de sorte à diminuer l'énergie totale pour se placer sur l'orbite elliptique de Hohmann. Même manœuvre au

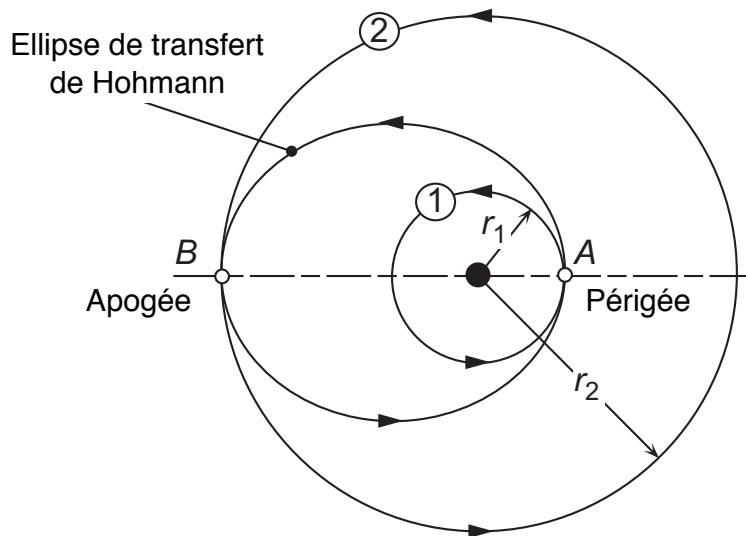


FIGURE 2. L'orbite de transfert imaginée par Walter Hohmann en 1925.

point A , avec décrétement de vitesse Δv_A , pour finalement se placer sur l'orbite circulaire intérieure dont l'énergie totale est la plus basse.

Bien sûr, le transfert de Hohmann à deux impulsions se généralise au cas de deux orbites elliptiques ayant une ligne des apsides commune. Si l'orbite initiale est elliptique, deux solutions sont possibles : donner l'impulsion de transfert au périgée ou à l'apogée. On peut montrer que la solution nécessitant le Δv total le plus faible est celle partant du périgée, où la vitesse du véhicule est la plus grande, et ce quelle que soit l'orbite à atteindre. La manoeuvre optimale pour atteindre une orbite elliptique depuis une orbite initiale circulaire consiste à terminer à l'apogée de l'orbite visée, là où la vitesse orbitale du véhicule sera minimale. S'il s'agit de passer d'une orbite de haute énergie (extérieure) à une orbite de basse énergie (intérieure), les mêmes Δv s'appliquent. Ainsi pour passer d'une orbite circulaire ou elliptique extérieure à une orbite elliptique intérieure il faut agir de sorte à finir au périgée de cette dernière. Si l'orbite visée est un cercle intérieur, l'ellipse de transfert doit démarrer à l'apogée de l'ellipse extérieure.

2.2. Exemple numérique de transfert de Hohmann. Considérons un véhicule spatial placé sur une orbite dont le périgée est à une altitude de 480 km et l'apogée culmine à 800 km. Quelle manoeuvre doit-il exécuter pour atteindre une orbite circulaire située à 16 000 km d'altitude ?

Connaissant les périgées et les apogées des 3 orbites, nous allons utiliser l'équation (1.5) pour calculer les moments cinétiques qui leur sont associés :

$$\text{Orbite initiale} \begin{cases} r_p = 6\,378 + 480 = 6\,858 \text{ km} \\ r_a = 6\,378 + 800 = 7\,178 \text{ km} \end{cases} \quad h_i = 52\,876,5 \text{ km}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$\text{Orbite de transfert} \begin{cases} r_p = 6\,378 + 480 = 6\,858 \text{ km} \\ r_a = 6\,378 + 16\,000 = 22\,378 \text{ km} \end{cases} \quad h_t = 64\,689,5 \text{ km}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$\text{Orbite finale} \begin{cases} r_p = 6\,378 + 16\,000 = 22\,378 \text{ km} \\ r_a = 6\,378 + 16\,000 = 22\,378 \text{ km} \end{cases} \quad h_f = 94\,445,1 \text{ km}^2 \text{ s}^{-1}$$

La manœuvre optimum se produit au périégée de l'orbite initiale. A cette position la vitesse du véhicule vaut $v_A|_i = h_i/r_A = 7,7102 \text{ km/s}$. La vitesse du véhicule doit alors atteindre $v_A|_t = h_t/r_A = 9,4327 \text{ km/s}$ pour que son moment cinétique augmente et atteigne h_t . L'incrément de vitesse nécessaire à la première manœuvre est donc égal à $\Delta v_A = 1,7225 \text{ km/s}$. A l'apogée de l'orbite de transfert, il faut faire une seconde manœuvre pour circulariser l'orbite. La vitesse à l'apogée de l'orbite de transfert vaut $v_B|_t = h_t/r_B = 2,8908 \text{ km/s}$. La vitesse de l'orbite circulaire valant $v_B|_f = h_f/r_B = 4,2204 \text{ km/s}$, il faut que la seconde manœuvre fournisse un incrément de vitesse égale à $\Delta v_B = 1,3296 \text{ km/s}$.

L'incrément de vitesse total vaut donc $\Delta v = \Delta v_A + \Delta v_B = 3,0521 \text{ km/s}$. C'est cette valeur qui fixe la quantité de carburant à consommer pour exécuter la manœuvre.

2.3. Transfert bi-elliptique. Pour passer d'une orbite circulaire à un autre, le transfert bi-elliptique utilise deux demies ellipses coaxiales qui s'étendent au-delà de l'orbite circulaire externe visée. Chacune des deux ellipses est tangente à l'une des orbites circulaires, et elles sont tangentes à leur apogée B commun (voir figure 3). L'idée est de placer B suffisamment loin du foyer des ellipses de sorte que le Δv requis en B soit aussi faible que possible. En fait, on peut montrer que Δv_B tend vers 0 quand r_B tend vers l'infini.

Si l'on note v_i la vitesse de l'orbite circulaire initiale, on peut montrer que les Δv requis pour la manœuvre de Hohmann et la manœuvre bi-elliptique sont données par

$$(2.1a) \quad \Delta v|_H = v_i \left[\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\sqrt{2}(\alpha - 1)}{\sqrt{\alpha(1 + \alpha)}} - 1 \right]$$

$$(2.1b) \quad \Delta v|_{BE} = v_i \left[\sqrt{\frac{2(\alpha + \beta)}{\alpha\beta}} - \frac{1 + \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}} - \sqrt{\frac{2}{\beta(1 + \beta)}}(1 - \beta) \right]$$

où l'on pose $\alpha = r_C/r_A$ et $\beta = r_B/r_A \geq \alpha$.

La figure 4 représente dans le plan (α, β) la région où la manœuvre de Hohmann est plus efficace ($\Delta v|_H < \Delta v|_{BE}$) et celle où c'est la manœuvre bi-elliptique qu'il faut choisir ($\Delta v|_H > \Delta v|_{BE}$). On calcule que si $r_C \leq 11,9388 r_A$, la manœuvre de Hohmann est toujours plus efficace. En revanche, si $r_C \geq 15,5817 r_A$, il faut toujours choisir la manœuvre bi-elliptique. Entre ces deux valeurs, une grande valeur de l'apogée r_B favorise la manœuvre bi-elliptique.

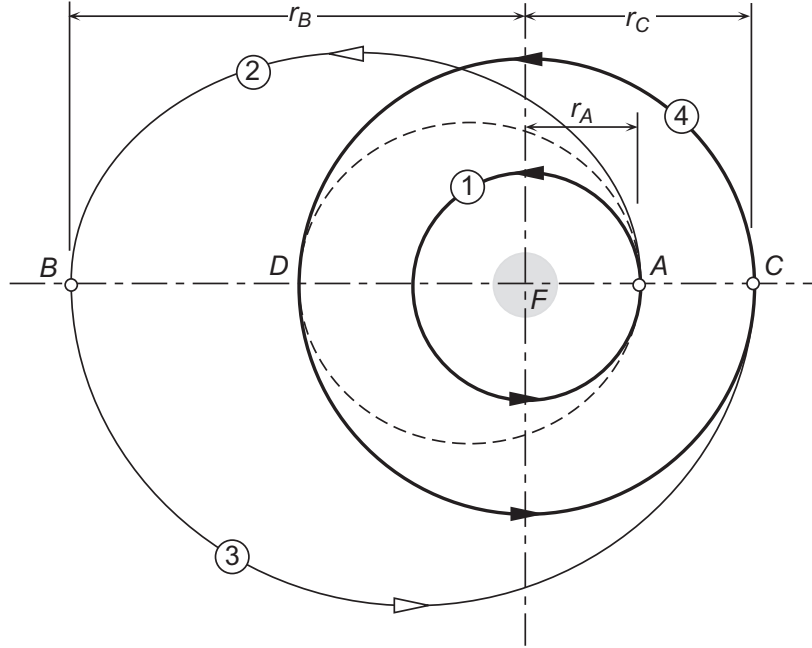


FIGURE 3. Manœuvre bi-elliptique permettant de passer d'une orbite circulaire à une autre en empruntant deux demies-ellipses.

Notons enfin que le gain d'efficacité énergétique peut être compensé par la durée de vol beaucoup plus longue de la trajectoire bi-elliptique par rapport à celle de la demi-ellipse simple du transfert de Hohmann.

2.4. Exemple numérique de transfert bi-elliptique. Quel est le Δv total requis pour passer d'une orbite circulaire de 7 000 km de rayon à une autre de 105 000 km de rayon en passant par une trajectoire bi-elliptique dont l'apogée est à 210 000 km ? Calculez aussi la durée du transfert et comparez là avec celle d'une ellipse de Hohmann.

Dans cette situation on a $r_A = 7\,000$ km, $r_B = 210\,000$ km et $r_C = r_D = 105\,000$ km avec $\alpha = r_C/r_A = 15$ et $\beta = r_B/r_A = 30$. D'après la figure 4 la manœuvre bi-elliptique sera plus efficace. Les équations (2.1a) et (2.1b) conduisent à

$$\Delta v|_H = 4,0463 \text{ km/s} \quad \text{et} \quad \Delta v|_{BE} = 4,0285 \text{ km/s}$$

sachant que la vitesse sur l'orbite circulaire initiale vaut $v_i = \sqrt{\mu/r_A} = 7,5460$ km/s. Comparons maintenant les durées des deux manœuvres. Le demi-grand axe de l'orbite de Hohmann vaut $a_H = (7\,000 + 105\,000)/2 = 56\,000$ km. Grâce à la troisième loi de Kepler, la durée de parcours de la demie-ellipse est donc donnée par

$$\Delta t_H = \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi^2 a_H^3}{\mu} \right)^{1/2} = 65\,942 \text{ s} \quad \text{soit } 0,7632 \text{ j}$$

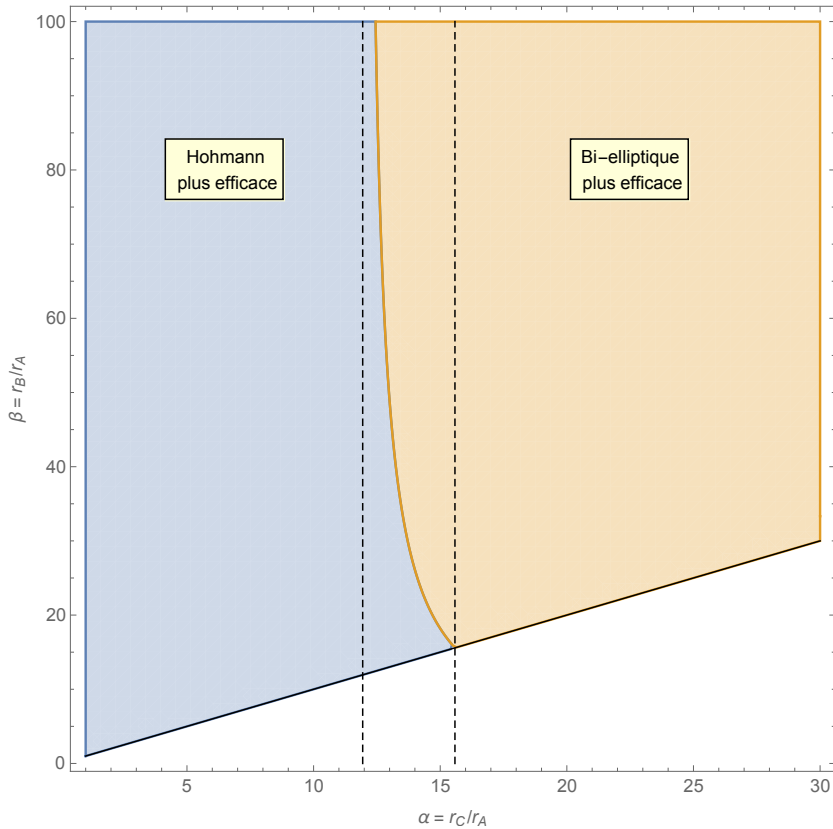


FIGURE 4. Comparaison de l'efficacité de la manœuvre de Hohmann et de la manœuvre bi-elliptique en fonction du rapport α des rayons des orbites circulaires à joindre et du rapport β entre l'apogée de la première ellipse parcourue et le rayon de l'orbite circulaire initiale.

Les demis-grands axes des ellipses de la manœuvre bi-elliptique sont donnés par

$$a_1 = \frac{1}{2}(7\,000 + 210\,000) = 108\,500 \text{ km} \quad a_2 = \frac{1}{2}(105\,000 + 210\,000) = 157\,500 \text{ km}$$

ce qui conduit à une durée de parcours égale à

$$\Delta t_{BE} = \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi^2 a_1^3}{\mu} \right)^{1/2} + \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi^2 a_2^3}{\mu} \right)^{1/2} = 488\,868 \text{ s} \text{ soit } 5,6582 \text{ j}$$

Bien que plus économe, la manœuvre bi-elliptique prend 7,4 fois plus de temps que celle de Hohmann. Il ne faut donc pas être pressé...

2.5. Manœuvre de phasage. Une manœuvre de phasage est un transfert de Hohmann qui consiste à partir d'une orbite pour y revenir au bout d'une durée spécifiée (voir figure 5). Ce type de manœuvre est utilisé pour modifier la position d'un engin spatial sur son orbite. Ainsi, si deux engins spatiaux destinés à se rencontrer se trouvent à des endroits différents de la même orbite, l'un d'entre eux peut effectuer une manœuvre

de phasage afin s'approcher de l'autre. Les satellites de communication et les satellites météorologiques en orbite géostationnaire utilisent aussi des manœuvres de phasage pour se déplacer vers de nouveaux emplacements au-dessus de l'équateur.

Sur la figure 5, l'orbite de phasage (1) peut être utilisée pour revenir au point P en moins d'une période de l'orbite principale : cette manoeuvre est appropriée si la cible se trouve devant le véhicule poursuivant. En revanche, si le chasseur est en avance sur la cible, il peut se mettre en phase avec elle en empruntant l'orbite (2) dont la période est plus longue.

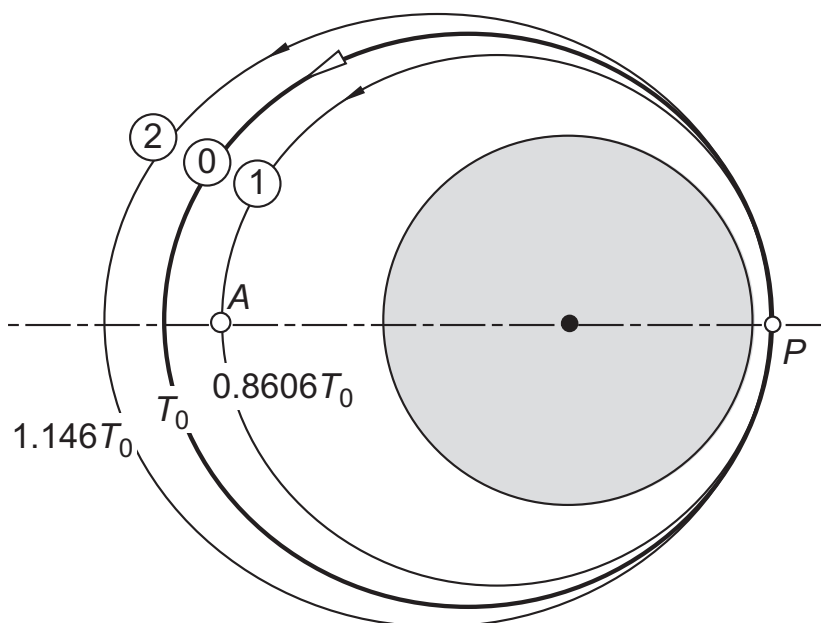


FIGURE 5. Orbite principale (0) et deux orbites de phasage, plus rapide (1) et plus lente (2) ; T_0 est la période de l'orbite principale. Notez qu'il faut faire agir des rétrofusées pour entrer sur l'orbite (1) au niveau du point P tandis qu'une propulsion est nécessaire pour passer sur l'orbite (2).

La procédure de calcul est simple. Une fois déterminée la période T de l'orbite de phasage, la troisième loi de Kepler (1.7) permet de trouver son demi-grand axe a . La relation $2a = r_P + r_A$ permet d'en déduire le rayon r_A de l'apogée connaissant le rayon r_P de l'orbite circulaire initiale, qui est aussi celui du périégée de l'orbite de phasage. La relation (1.5) permet alors de déterminer le moment cinétique associé à l'orbite de phasage et donc la vitesse orbitale à atteindre par l'impulsion donnée au point P . Le Δv à fournir peut être diminué en réduisant la différence entre la période de l'orbite de phasage et de l'orbite principale. Cela peut se faire en parcourant de plus nombreuses orbites de phasage.

2.6. Exemple numérique de manœuvre de phasage. Calculer la manœuvre à exécuter pour décaler la longitude d'un satellite géostationnaire équatorial de $\Delta\lambda = 12^\circ$ vers l'ouest (i.e. "en arrière") en ayant parcouru trois fois l'orbite de phasage.

Rappelons qu'un satellite géostationnaire équatorial a une période de révolution égale à la période de rotation sidérale de la Terre $T_\oplus = 23^{\text{h}}56^{\text{m}}4^{\text{s}} = 86\,164$ s. La vitesse angulaire de cette orbite vaut donc $\Omega_\oplus = 2\pi/T_\oplus = 7,2921 \times 10^{-5}$ rad/s. Le rayon de cette orbite s'obtient grâce à la troisième loi de Kepler, d'où l'on déduit la vitesse orbitale

$$r_{\text{GEO}} = \left(\frac{\mu}{\Omega_\oplus^2} \right)^{1/3} = 42\,164 \text{ km} \quad v_{\text{GEO}} = r_{\text{GEO}}\Omega_\oplus = 3,0747 \text{ km/s}$$

Pendant que le satellite parcourt 3 fois l'orbite de phasage, il faut que son fantôme sur l'orbite géostationnaire parcourt 3 tours plus $\Delta\lambda$. Cela signifie que la période T de l'orbite de phasage doit vérifier la relation suivante

$$\Omega_\oplus(3T) = 3 \times 2\pi + \Delta\lambda$$

En exprimant $\Delta\lambda$ en radian, on obtient $T = 87\,121$ s, ce qui est bien supérieur à la période géostationnaire. Le demi-grand axe de l'orbite de phasage vaut donc

$$a = \left(\frac{\mu T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = 42\,476 \text{ km}$$

Sachant que pour le périhélie on a $r_p = r_{\text{GEO}}$, on peut alors calculer le rayon r_a de l'apogée : $r_a = 2a - r_p = 42\,788$ km. On en déduit alors le moment cinétique h de l'orbite de phasage grâce à l'équation (1.5), ainsi que sa vitesse à la position initiale

$$h = \sqrt{2\mu \frac{r_a r_p}{r_a + r_p}} = 130\,115 \text{ km}^2 \text{ s}^{-1} \quad v_p = \frac{h}{r_p} = 3,0859 \text{ km/s}$$

Ainsi, la première impulsion de la manœuvre de phasage se fait en propulsant le satellite de sorte qu'il acquiert $\Delta v_1 = v_p - v_{\text{GEO}} = 0,0112$ km/s. La manœuvre de phasage se termine en actionnant les rétrofusées pour le replacer sur l'orbite géostationnaire avec $\Delta v_2 = v_{\text{GEO}} - v_p = -0,0112$ km/s.

2.7. Autres manœuvres de transfert. Il existe bien d'autres manœuvres de transfert que nous n'aborderons pas ici. Par exemple, il est possible de passer d'une orbite elliptique à une autre ayant la même ligne des apsides sans suivre une ellipse de Hohmann. Plus coûteuse du point de vue énergétique elle est aussi plus rapide. On peut aussi passer d'une orbite à une autre n'ayant pas la même ligne des apsides, problème sans solution de Hohmann (i.e. sans ellipse tangente aux deux orbites à joindre). Il est aussi bien utile de pouvoir changer le plan orbital d'un véhicule spatial. Enfin, il faudrait se résoudre à abandonner l'hypothèse impulsionnelle et tenir compte de la durée de la propulsion dans la manœuvre. Il n'y a pas de problème théorique particulier dans ces situations, si ce n'est une complexité calculatoire plus grande, voire la nécessité d'une résolution numérique dans le dernier cas.

3. MOUVEMENT RELATIF ET RENDEZ-VOUS ORBITAUX

Le but de cette partie est de traiter de la délicate question de la manoeuvre orbitale visant à exécuter un rendez-vous entre deux engins spatiaux.

3.1. Mouvement relatif en orbite. Une manoeuvre de rendez-vous orbital implique un véhicule cible A passif et un véhicule chasseur B qui va exécuter une manoeuvre pour l'amener au voisinage de A . L'orbite de chaque véhicule étant connue dans le référentiel géocentrique $OXYZ$, on peut y définir à chaque instant les vecteurs positions de la cible et du chasseur, notés \mathbf{r}_A et \mathbf{r}_B . On connaît aussi leurs vitesses \mathbf{v}_A et \mathbf{v}_B et leurs accélérations \mathbf{a}_A et \mathbf{a}_B à chaque instant, données par la deuxième loi de Newton

$$(3.1) \quad \mathbf{a}_A = -\frac{\mu}{r_A^3} \mathbf{r}_A \quad \text{et} \quad \mathbf{a}_B = -\frac{\mu}{r_B^3} \mathbf{r}_B$$

Pour traiter du mouvement relatif du chasseur par rapport à la cible A , il est utile de définir le référentiel $Axyz$ dont les axes sont choisis de la façon suivante : l'axe x est porté par le vecteur unitaire \mathbf{i} dirigé radialement ; l'axe z est perpendiculaire au plan orbital, donc dirigé selon le moment cinétique \mathbf{h}_A de la cible, qui est conservé au cours du mouvement ; l'axe y complète les deux précédents pour former un trièdre orthonormé direct. La base du référentiel comobile avec A est donc donnée par (voir figure 6)

$$(3.2) \quad \mathbf{i} = \frac{\mathbf{r}_A}{r_A} \quad \mathbf{k} = \frac{\mathbf{h}_A}{h_A} \quad \mathbf{j} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{i}$$

La vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$ du référentiel lié à la cible est simplement la vitesse angulaire du vecteur position de celle-ci. Considérant que le moment cinétique de la cible est conservé on peut écrire $\mathbf{h}_A = \mathbf{r}_A \wedge \mathbf{v}_A = r_A^2 \boldsymbol{\Omega}$ ce qui donne

$$(3.3) \quad \boldsymbol{\Omega} = \frac{\mathbf{h}_A}{r_A^2}$$

L'accélération angulaire du référentiel lié à A se calcule en dérivant (3.3)

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{h}_A}{r_A^2} \right) = -2 \frac{\mathbf{h}_A}{r_A^3} \dot{r}_A$$

Dériver l'identité $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2$ conduit à $\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = r\dot{r}$ qui permet d'obtenir

$$(3.4) \quad \dot{\boldsymbol{\Omega}} = -2 \frac{\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{r}_A}{r_A^4} \mathbf{h}_A = -2 \frac{\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{r}_A}{r_A^2} \boldsymbol{\Omega}$$

Passons maintenant au mouvement relatif du chasseur. Sa position par rapport à la cible est donnée par $\mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$. Il est aussi possible d'exprimer sa vitesse relative et son accélération relative

$$(3.5a) \quad \mathbf{v}_r = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A - \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}$$

$$(3.5b) \quad \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_B - \mathbf{a}_A - \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{r} - \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}) - 2 \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_r$$

A priori, les composantes de \mathbf{r} , \mathbf{v}_r et \mathbf{a}_r sont connues dans le référentiel géocentrique $OXYZ$ car c'est dans celui-ci que l'on connaît les orbites de deux objets. Pour trouver

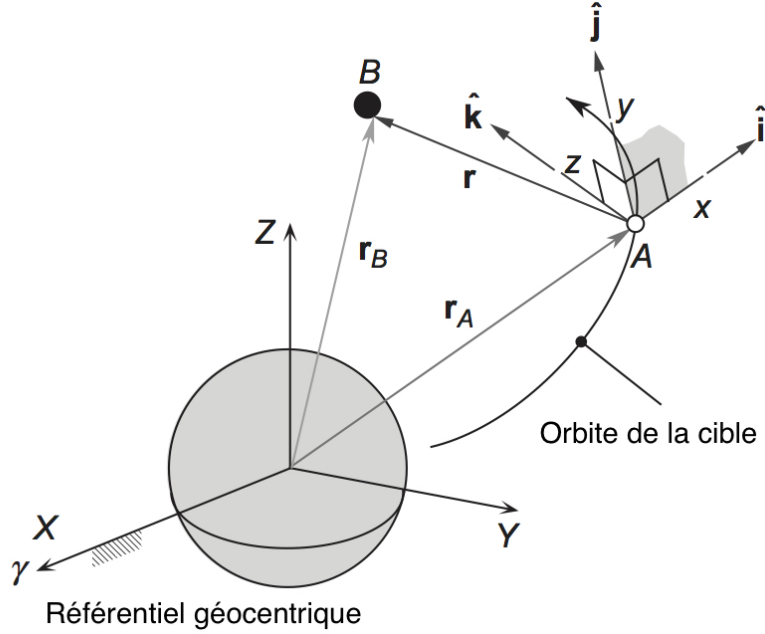


FIGURE 6. Définition du référentiel comobile lié à la cible A et position relative de l'objet chasseur B .

leur composantes dans le référentiel comobile $Axyz$, il faut connaître la matrice de passage Q de $OXYZ$ à $Axyz$ dont les colonnes sont les coordonnées de $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ sur la base $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$. Les coordonnées de la position, de la vitesse et de l'accélération relatives dans le référentiel comobile sont alors données par

$$(3.6) \quad \mathbf{r}|_{Axyz} = {}^tQ \mathbf{r}|_{OXYZ} \quad \mathbf{v}_r|_{Axyz} = {}^tQ \mathbf{v}_r|_{OXYZ} \quad \mathbf{a}_r|_{Axyz} = {}^tQ \mathbf{a}_r|_{OXYZ}$$

En résumé, passer des coordonnées de la position, de la vitesse et de l'accélération du chasseur B exprimées dans le référentiel géocentrique, à celles exprimées dans le référentiel comobile se fait selon la procédure suivante

- Calculez le moment cinétique $\mathbf{h}_A = \mathbf{r}_A \wedge \mathbf{v}_A$;
- Calculez des vecteurs unitaires $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ avec (3.2) ;
- Ecrivez la matrice de passage Q dont les colonnes sont les composantes de $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$;
- Calculez $\mathbf{\Omega}$ avec (3.3) et $\dot{\mathbf{\Omega}}$ avec avec (3.4) ;
- Calculez les accélérations de A et B dans le référentiel géocentrique avec (3.1) ;
- Calculez $\mathbf{r} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$, puis \mathbf{v}_r avec (3.5a) et \mathbf{a}_r avec (3.5b) ;
- Faites le changement de coordonnées grâce à (3.6).

3.2. Linéarisation des équations du mouvement relatif. Nous noterons A l'objet cible et B le véhicule chasseur qui va manoeuvrer pour atteindre A . La position de la

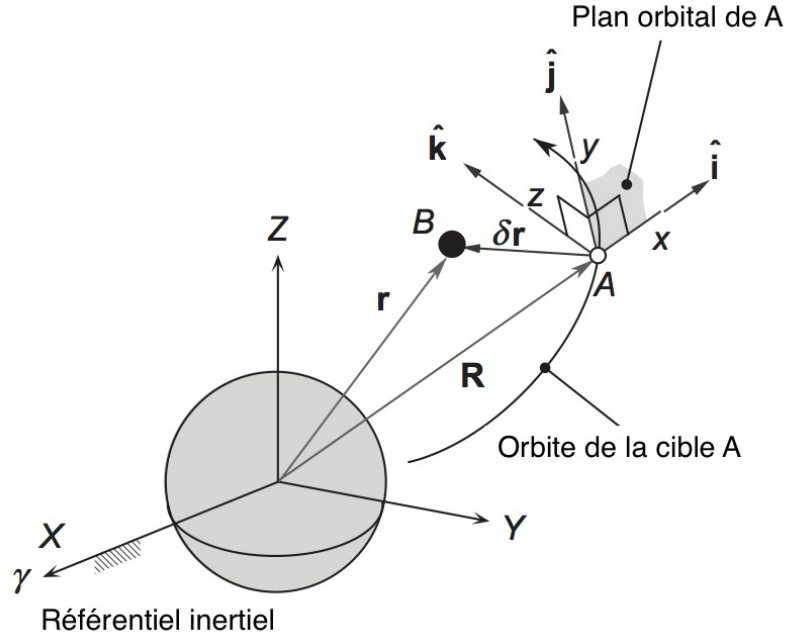


FIGURE 7. Définitions pour linéariser le mouvement du chasseur B relativement à sa cible A .

cible par rapport au référentiel géocentrique est donnée par \mathbf{R} tandis que le chasseur est repéré par \mathbf{r} . La position relative $\delta\mathbf{r}$ entre cible et chasseur est définie par

$$(3.7) \quad \mathbf{r} = \mathbf{R} + \delta\mathbf{r} \quad \text{avec} \quad \frac{\delta r}{R} \ll 1$$

L'approximation que nous faisons est vérifiée dans la dernière phase d'approche, ce qui suppose que le chasseur ait préalablement été placé sur une orbite relativement proche de celle de sa cible. Maintenant, le but est d'écrire l'équation du mouvement du chasseur dans le référentiel de la cible (voir figure 7).

L'équation du mouvement du chasseur relativement au référentiel géocentrique supposé inertiel s'écrit

$$(3.8) \quad \ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad \text{avec} \quad \mu = GM_{\oplus}$$

En tenant compte de la définition de la position relative on obtient

$$(3.9) \quad \delta\ddot{\mathbf{r}} = -\ddot{\mathbf{R}} - \mu \frac{\mathbf{R} + \delta\mathbf{r}}{r^3} \quad \text{avec} \quad r = \|\mathbf{R} + \delta\mathbf{r}\|$$

Il s'agit maintenant de simplifier cette équation en tenant compte du fait que δr est très petit par rapport à R . Notons d'abord que

$$r^2 = (\mathbf{R} + \delta\mathbf{r})^2 = R^2 + \delta r^2 + 2\mathbf{R} \cdot \delta\mathbf{r} = R^2 \left(1 + \frac{2\mathbf{R} \cdot \delta\mathbf{r}}{R^2} + \left(\frac{\delta r}{R} \right)^2 \right)$$

Un développement limité à l'ordre 1 en $\delta r/R$ permet d'obtenir

$$r^{-3} = R^{-3} \left(1 - 3 \frac{\mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{r}}{R^2} \right)$$

En substituant cette expression dans l'équation (3.9) et en ne conservant que les termes d'ordres 1 en $\delta r/R$ on obtient l'équation

$$\begin{aligned} \delta \ddot{\mathbf{r}} &= -\ddot{\mathbf{R}} - \mu \left(\frac{1}{R^3} - 3 \frac{\mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{r}}{R^5} \right) (\mathbf{R} + \delta \mathbf{r}) \\ &= -\ddot{\mathbf{R}} - \mu \left(\frac{\mathbf{R} + \delta \mathbf{r}}{R^3} - 3 \frac{(\mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{r})(\mathbf{R} + \delta \mathbf{r})}{R^5} \right) \\ &= -\ddot{\mathbf{R}} - \mu \left(\frac{\mathbf{R}}{R^3} + \frac{\delta \mathbf{r}}{R^3} - 3 \frac{(\mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{r})\mathbf{R}}{R^5} + \text{termes d'ordre 2 en } \frac{\delta r}{R} \right) \end{aligned}$$

En tenant compte du fait que l'équation du mouvement de la cible exprimée dans le référentiel géocentrique inertiel s'écrit

$$\ddot{\mathbf{R}} = -\mu \frac{\mathbf{R}}{R^3}$$

On obtient l'équation linéarisée pour le mouvement relatif du chasseur par rapport à la cible dont le mouvement \mathbf{R} est supposé connu

$$(3.10) \quad \delta \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{R^3} \left(\delta \mathbf{r} - 3 \frac{(\mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{r})\mathbf{R}}{R^2} \right)$$

Il s'agit maintenant d'écrire les équations différentielles régissant les coordonnées du chasseur dans le référentiel centré sur la cible A . Comme le montre la figure 7, la direction de \mathbf{i} est la direction radiale joignant le centre de la Terre à A , le plan (\mathbf{i}, \mathbf{j}) est celui de l'orbite de A et la direction \mathbf{k} est directement perpendiculaire à ce plan. Cela permet de définir les coordonnées du chasseur relativement à la cible

$$\mathbf{R} = R \mathbf{i} \quad \text{et} \quad \delta \mathbf{r} = \delta x \mathbf{i} + \delta y \mathbf{j} + \delta z \mathbf{k}$$

En remplaçant dans l'équation (3.10), on obtient la relation suivante

$$(3.11) \quad \delta \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{R^3} (-2 \delta x \mathbf{i} + \delta y \mathbf{j} + \delta z \mathbf{k})$$

Il faut se rappeler que $\delta \ddot{\mathbf{r}}$ est l'accélération du chasseur B relativement à sa cible A mesurée dans le référentiel géocentrique inertiel ; on a donc $\delta \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_B - \ddot{\mathbf{r}}_A$. Il ne faut donc pas confondre $\delta \ddot{\mathbf{r}}$ avec $\delta \mathbf{a}|_r = \delta \ddot{x} \mathbf{i} + \delta \ddot{y} \mathbf{j} + \delta \ddot{z} \mathbf{k}$, l'accélération relative mesurée dans le référentiel lié à la cible A . Ces deux accélérations sont liées par

$$(3.12) \quad \delta \ddot{\mathbf{r}} = \delta \mathbf{a}|_r + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \delta \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \delta \mathbf{r}) + 2 \boldsymbol{\Omega} \wedge \delta \mathbf{v}|_r$$

où $\boldsymbol{\Omega}$ est le vecteur vitesse angulaire du référentiel comobile.

Comme le moment cinétique de A est conservé, le vecteur $\mathbf{h} = \mathbf{R} \wedge \dot{\mathbf{R}}$ a une direction constante perpendiculaire au plan orbital. Il prend donc la forme $\mathbf{h} = h \mathbf{k}$. On en déduit donc les expressions suivantes

$$(3.13) \quad \boldsymbol{\Omega} = \frac{h}{R^2} \mathbf{k} \quad \text{et} \quad \dot{\boldsymbol{\Omega}} = -2 \frac{h(\mathbf{V} \cdot \mathbf{R})}{R^4} \mathbf{k} \quad \text{avec} \quad \mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}$$

Ces expressions permettent alors d'obtenir les coordonnées des accélérations d'inertie

$$(3.14a) \quad \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \delta \mathbf{r} = \left(-2 \frac{h(\mathbf{V} \cdot \mathbf{R})}{R^4} \mathbf{k} \right) \wedge (\delta x \mathbf{i} + \delta y \mathbf{j} + \delta z \mathbf{k}) = 2 \frac{h(\mathbf{V} \cdot \mathbf{R})}{R^4} (\delta y \mathbf{i} - \delta x \mathbf{j})$$

$$(3.14b) \quad \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \delta \mathbf{r}) = \frac{h}{R^2} \mathbf{k} \wedge \left(\frac{h}{R^2} \mathbf{k} \wedge (\delta x \mathbf{i} + \delta y \mathbf{j} + \delta z \mathbf{k}) \right) = -\frac{h^2}{R^4} (\delta x \mathbf{i} + \delta y \mathbf{j})$$

$$(3.14c) \quad 2 \boldsymbol{\Omega} \wedge \delta \mathbf{v}|_r = 2 \frac{h}{R^2} \mathbf{k} \wedge (\delta \dot{x} \mathbf{i} + \delta \dot{y} \mathbf{j} + \delta \dot{z} \mathbf{k}) = 2 \frac{h}{R^2} (\delta \dot{x} \mathbf{j} - \delta \dot{y} \mathbf{i})$$

En substituant les expressions (3.12), (3.14a), (3.14b) et (3.14c) dans l'équation du mouvement (3.11), on obtient l'équation suivante

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{a}|_r = \delta \ddot{x} \mathbf{i} + \delta \ddot{y} \mathbf{j} + \delta \ddot{z} \mathbf{k} = & \underbrace{-\frac{\mu}{R^3} (-2 \delta x \mathbf{i} + \delta y \mathbf{j} + \delta z \mathbf{k})}_{\delta \ddot{\mathbf{r}}} - 2 \underbrace{\frac{h(\mathbf{V} \cdot \mathbf{R})}{R^4} (\delta y \mathbf{i} - \delta x \mathbf{j})}_{\dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \delta \mathbf{r}} \\ & - \underbrace{\left(-\frac{h^2}{R^4} (\delta x \mathbf{i} + \delta y \mathbf{j}) \right)}_{\boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \delta \mathbf{r})} - 2 \underbrace{\frac{h}{R^2} (\delta \dot{x} \mathbf{j} - \delta \dot{y} \mathbf{i})}_{2 \boldsymbol{\Omega} \wedge \delta \mathbf{v}|_r} \end{aligned}$$

En égalisant composante à composante, cette équation vectorielle conduite au système différentiel suivant régissant l'évolution temporelle des coordonnées relatives $(\delta x, \delta y, \delta z)$

$$(3.15a) \quad \delta \ddot{x} - \left(\frac{2\mu}{R^3} + \frac{h^2}{R^4} \right) \delta x + \frac{2h(\mathbf{V} \cdot \mathbf{R})}{R^4} \delta y - 2 \frac{h}{R^2} \delta \dot{y} = 0$$

$$(3.15b) \quad \delta \ddot{y} + \left(\frac{\mu}{R^3} - \frac{h^2}{R^4} \right) \delta y - \frac{2h(\mathbf{V} \cdot \mathbf{R})}{R^4} \delta x + 2 \frac{h}{R^2} \delta \dot{x} = 0$$

$$(3.15c) \quad \delta \ddot{z} + \frac{\mu}{R^3} \delta z = 0$$

Comme la coordonnée relative δz n'apparaît que dans la troisième équation, son évolution est indépendante des deux autres coordonnées. Si l'orbite de la cible est une ellipse, \mathbf{R} et \mathbf{V} dépendent tous les deux du temps (tout en conservant le moment cinétique \mathbf{h}) et il n'y a pas de solution analytique au système formé par les équations (3.15a) et (3.15b). Mais il est bien sûr possible de les résoudre numériquement.

3.3. Les équations de Clohessy–Wiltshire. Désormais nous allons considérer que l'orbite de l'objet cible est circulaire. Dans cette situation $\mathbf{R} \cdot \mathbf{V} = 0$ à tout instant et la relation fondamentale de la dynamique s'écrit

$$\frac{V^2}{R} = \frac{\mu}{R^2} \quad \text{conduisant à} \quad h = RV = \sqrt{\mu R}$$

Le système (3.15a), (3.15b) et (3.15c) se simplifie alors considérablement et devient

$$(3.16a) \quad \delta \ddot{x} - 3\Omega^2 \delta x - 2\Omega \delta \dot{y} = 0$$

$$(3.16b) \quad \delta \ddot{y} + 2\Omega \delta \dot{x} = 0$$

$$(3.16c) \quad \delta \ddot{z} + \Omega^2 \delta z = 0$$

où Ω est la vitesse angulaire de l'orbite circulaire définie par

$$\Omega = \frac{V}{R} = \sqrt{\frac{\mu}{R^3}}$$

L'équation (3.16b) s'intègre à vue pour donner $\delta\dot{y} + 2\Omega\delta x = C_1$. Cela permet de réécrire l'équation (3.16a) sous la forme $\delta\ddot{x} + \Omega^2\delta x = 2\Omega C_1$ dont l'intégration très simple conduit à la solution

$$(3.17) \quad \delta x = \frac{2}{\Omega} C_1 + C_2 \sin(\Omega t) + C_3 \cos(\Omega t)$$

Sachant que $\delta\dot{y} = C_1 - 2\Omega\delta x$ on en déduit une équation différentielle en δy dont l'intégration aisée conduit à

$$(3.18) \quad \delta y = -3C_1 t + 2C_2 \cos(\Omega t) - 2C_3 \sin(\Omega t) + C_4$$

Les constantes C_1 à C_4 peuvent être calculée en fixant les conditions initiales de l'objet chasseur à $t = 0$

$$\delta x = \delta x_0, \quad \delta y = \delta y_0, \quad \delta\dot{x} = \delta\dot{x}_0, \quad \delta\dot{y} = \delta\dot{y}_0$$

Cela conduit au système linéaire de quatre équations

$$(3.19a) \quad \frac{2}{\Omega} C_1 + C_3 = \delta x_0$$

$$(3.19b) \quad \Omega C_2 = \delta\dot{x}_0$$

$$(3.19c) \quad 2C_2 + C_4 = \delta y_0$$

$$(3.19d) \quad -3C_1 - 2\Omega C_3 = \delta\dot{y}_0$$

dont la solution est

$$(3.20) \quad C_1 = 2\Omega\delta x_0 + \delta\dot{y}_0 \quad C_2 = \frac{1}{\Omega}\delta\dot{x}_0 \quad C_3 = -3\delta x_0 - \frac{2}{\Omega}\delta\dot{y}_0 \quad C_4 = -\frac{2}{\Omega}\delta\dot{x}_0 + \delta y_0$$

L'équation (3.16c) s'intègre aussi très facilement en $\delta z = C_5 \sin(\Omega t) + C_6 \cos(\Omega t)$ et les constantes d'intégration se déduisent des conditions initiales $\delta z = \delta z_0$ et $\delta\dot{z} = \delta\dot{z}_0$. On obtient finalement la solution générale de Clohessy–Wiltshire

$$(3.21a) \quad \delta x = 4\delta x_0 + \frac{2}{\Omega}\delta\dot{y}_0 + \frac{1}{\Omega}\delta\dot{x}_0 \sin(\Omega t) - \left(3\delta x_0 + \frac{2}{\Omega}\delta\dot{y}_0\right) \cos(\Omega t)$$

$$(3.21b) \quad \delta y = \delta y_0 - \frac{2}{\Omega}\delta\dot{x}_0 + 2 \left(3\delta x_0 + \frac{2}{\Omega}\delta\dot{y}_0\right) \sin(\Omega t) + \frac{2}{\Omega}\delta\dot{x}_0 \cos(\Omega t) \\ - 3(2\Omega\delta x_0 + \delta\dot{y}_0)t$$

$$(3.21c) \quad \delta z = \frac{1}{\Omega}\delta\dot{z}_0 \sin(\Omega t) + \delta z_0 \cos(\Omega t)$$

Première observation, ces trois composantes oscillent à la pulsation de révolution orbitale de la cible. Seconde observation, δy possède un terme qui varie linéairement avec le temps. Du coup, à moins que $2\Omega\delta x_0 + \delta\dot{y}_0 = 0$, le chasseur s'éloignera inexorablement de la cible et la qualité de la solution trouvée se dégradera car notre hypothèse de travail $\delta r \ll R$ finira par ne plus être respectée.

Pour quantifier le problème, considérons le cas d'un objet lâché par la cible (à l'origine du référentiel comobile donc) orbitant à une altitude de 300 km. La vitesse initiale de

l'objet est dirigée uniquement selon l'axe Ay et vaut $\delta y_0 = -10$ m/s. La dérive séculaire de δy au bout d'une orbite de période $T = 2\pi/\Omega$ est égale à $-3 \delta y_0 T = 162.6$ km.

En dérivant la solution générale de Clohessy–Wiltshire on obtient les composantes de la vitesse relative exprimées dans le référentiel comobile

$$(3.22a) \quad \delta \dot{x} = \delta \dot{x}_0 \cos(\Omega t) + (3 \Omega \delta x_0 + 2 \delta \dot{y}_0) \sin(\Omega t)$$

$$(3.22b) \quad \delta \dot{y} = 2(3 \Omega \delta x_0 + 2 \delta \dot{y}_0) \cos(\Omega t) - 2 \delta \dot{x}_0 \sin(\Omega t) - 3(2 \Omega \delta x_0 + \delta \dot{y}_0)$$

$$(3.22c) \quad \delta \dot{z} = \delta \dot{z}_0 \cos(\Omega t) - \Omega \delta z_0 \sin(\Omega t)$$

Le mouvement dans le référentiel comobile est donc entièrement connu par les expressions des vecteurs position et vitesse relatives, $\delta \mathbf{r}$ et $\delta \mathbf{v} = \delta \dot{\mathbf{r}}$. L'expression de leurs coordonnées peut se réarranger pour se mettre sous une forme matricielle

$$(3.23a) \quad \delta \mathbf{r} = \Phi_{rr} \delta \mathbf{r}_0 + \Phi_{rv} \delta \mathbf{v}_0$$

$$(3.23b) \quad \delta \mathbf{v} = \Phi_{vr} \delta \mathbf{r}_0 + \Phi_{vv} \delta \mathbf{v}_0$$

où les matrices Φ_{ij} sont données par

$$(3.24a) \quad \Phi_{rr} = \begin{bmatrix} 4 - 3 \cos(\Omega t) & 0 & 0 \\ 6(\sin(\Omega t) - \Omega t) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\Omega t) \end{bmatrix}$$

$$(3.24b) \quad \Phi_{rv} = \frac{1}{\Omega} \begin{bmatrix} \sin(\Omega t) & 2(1 - \cos(\Omega t)) & 0 \\ 2(\cos(\Omega t) - 1) & 4 \sin(\Omega t) - 3 \Omega t & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\Omega t) \end{bmatrix}$$

$$(3.24c) \quad \Phi_{vr} = \Omega \begin{bmatrix} 3 \sin(\Omega t) & 0 & 0 \\ 6(\cos(\Omega t) - 1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(\Omega t) \end{bmatrix} = \frac{d\Phi_{rr}}{dt}$$

$$(3.24d) \quad \Phi_{vv} = \begin{bmatrix} \cos(\Omega t) & 2 \sin(\Omega t) & 0 \\ -2 \sin(\Omega t) & 4 \cos(\Omega t) - 3 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\Omega t) \end{bmatrix} = \frac{d\Phi_{rv}}{dt}$$

3.4. Rendez-vous orbital à deux impulsions. Nous avons désormais tous les outils pour calculer la manoeuvre à accomplir afin de réaliser un rendez-vous orbital. Le plus simple consiste à donner deux impulsions au chasseur pour lui faire atteindre la cible. À l'instant $t = 0^-$ la position $\delta \mathbf{r}_0$ et la vitesse $\delta \mathbf{v}_0^-$ du chasseur relativement à la cible sont connues. À $t = 0$ la cible subie une impulsion instantanée qui fait passer sa vitesse relative à $\delta \mathbf{v}_0^+$ au temps $t = 0^+$. La question est de déterminer les composantes de $\delta \mathbf{v}_0^+$ pour que le chasseur atteigne la cible au temps spécifié $t = t_f$. La variation de vitesse nécessaire pour placer le chasseur sur la trajectoire de rendez-vous est définie par

$$\Delta \mathbf{v}_0 = \delta \mathbf{v}_0^+ - \delta \mathbf{v}_0^-$$

L'évaluation de l'équation (3.23a) au temps t_f conduit à l'équation matricielle

$$\delta \mathbf{r}_f = \Phi_{rr}(t_f) \delta \mathbf{r}_0 + \Phi_{rv}(t_f) \delta \mathbf{v}_0^+ = \mathbf{0}$$

dont la solution est immédiatement

$$\delta \mathbf{v}_0^+ = -\Phi_{rv}(t_f)^{-1} \Phi_{rr}(t_f) \delta \mathbf{r}_0$$

où $\Phi_{rv}(t_f)^{-1}$ est la matrice inverse de $\Phi_{rv}(t_f)$. En substituant la relation précédente dans l'équation (3.23b), on obtient la vitesse du chasseur juste avant d'arriver à la cible, au temps $t = t_f^-$

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{v}_f^- &= \Phi_{vr}(t_f)\delta\mathbf{r}_0 + \Phi_{vv}(t_f)\delta\mathbf{v}_0^+ \\ &= [\Phi_{vr}(t_f) - \Phi_{vv}(t_f)\Phi_{rv}(t_f)^{-1}\Phi_{rr}(t_f)]\delta\mathbf{r}_0\end{aligned}$$

Il reste maintenant à exécuter une seconde manoeuvre de changement de vitesse pour amener le chasseur au repos par rapport à la cible ($\delta\mathbf{v}_f^+ = 0$)

$$\Delta\mathbf{v}_f = \delta\mathbf{v}_f^+ - \delta\mathbf{v}_f^- = -\delta\mathbf{v}_f^-$$

Une remarque finale : la notion de Δv , très utilisée en astronautique fait souvent référence à la variation de la vitesse absolue du mobile. Ici nous avons utilisé la différence de vitesse relative, mais cela ne change rien ! En effet, la cinématique du point permet de lier la vitesse absolue \mathbf{v} d'un mobile à celle \mathbf{V} d'un autre pris comme référence selon

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + (\mathbf{v}_r + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r})$$

où \mathbf{r} et \mathbf{v}_r sont respectivement la position et la vitesse relatives.

Pour calculer $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-$ on applique la relation précédente aux instants t^+ et t^- en considérant une cible passive pour laquelle $\mathbf{V}^+ = \mathbf{V}^-$ et $\boldsymbol{\Omega}^+ = \boldsymbol{\Omega}^-$. De plus, une manoeuvre impulsionnelle ne change que la vitesse et non la position du chasseur donc $\mathbf{r}^+ = \mathbf{r}^-$. Finalement on obtient $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^- = \mathbf{v}_r^+ - \mathbf{v}_r^- = \Delta\mathbf{v}_r$.

3.5. Application au film Gravity. Nous allons utiliser les calculs précédents en choisissant les conditions initiales adaptées à une scène du film *Gravity* (A. Cuarón, 2013). Ryan Stone est au commande d'une capsule Soyouz et doit aborder la station spatiale chinoise Tiangong-1 qui orbite à 370 km d'altitude. Pour ce calcul, on supposera qu'elle est initialement située 2 km derrière la station et sur la même orbite qu'elle. Stone commence par déclencher les rétrofusées d'atterrissage de la capsule. À l'approche de la station chinoise, elle sort de la capsule et finit sa manoeuvre en se propulsant grâce à un extincteur. La cible est atteinte au bout d'environ 4 minutes (durée de la séquence) et la seconde impulsion est donnée grâce à un extincteur. Quelle manoeuvre a dû mener Stone pour atteindre son objectif ? Ce que montre le film est-il plausible ?

Les paramètres orbitaux de la station Tiangong-1 et de la capsule Soyouz sont :

$$V = \sqrt{\frac{GM_\oplus}{R}} = 7,6857 \text{ km/s}, \quad \Omega = \frac{V}{R} = 1,1389 \times 10^{-3} \text{ rad/s}, \quad T = \frac{2\pi}{\Omega} = 5\,516,6 \text{ s}$$

Les matrices de Clohessy-Wiltshire (réduites à des matrices 2×2 car il n'y pas pas de mouvement perpendiculaire au plan orbital) calculées au temps t_f sont alors données par

$$\begin{aligned}\Phi_{rr} &= \begin{bmatrix} 1,1114 & 0 \\ -2,0348 \times 10^{-2} & 1 \end{bmatrix} & \Phi_{rv} &= \begin{bmatrix} 237,02 & 65,196 \\ -65,196 & 228,09 \end{bmatrix} \\ \Phi_{vr} &= \begin{bmatrix} -9,2241 \times 10^{-4} & 0 \\ -2,5372 \times 10^{-4} & 0 \end{bmatrix} & \Phi_{vv} &= \begin{bmatrix} 0,96287 & 0,53991 \\ -0,53991 & 0,85149 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Les positions initiales et finales dans le référentiel de Clohessy-Wiltshire sont données par $\delta \mathbf{r}_0 = (0, -2)$ km et $\delta \mathbf{r}_f = (0, 0)$ km. La relation $\delta \mathbf{v}_0^+ = -\Phi_{rv}(t_f)^{-1} \Phi_{rr}(t_f) \delta \mathbf{r}_0$ conduit à écrire (unité km/s)

$$\delta \mathbf{v}_0^+ = \begin{bmatrix} -3,9115 \times 10^{-3} & 1,1180 \times 10^{-3} \\ -1,1180 \times 10^{-3} & -4,0647 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,1114 & 0 \\ -2,0348 \times 10^{-2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,2361 \times 10^{-3} \\ 8,1293 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

La vitesse du chasseur juste avant d'arriver à la cible, au temps $t = t_f^-$, est donnée par la seconde relation de Clohessy-Wiltshire $\delta \mathbf{v}_f^- = \Phi_{vr}(t_f) \delta \mathbf{r}_0 + \Phi_{vv}(t_f) \delta \mathbf{v}_0^+$ qui se traduit numériquement par

$$\delta \mathbf{v}_f^- = \begin{bmatrix} -9,2241 \times 10^{-4} & 0 \\ -2,5372 \times 10^{-4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,96287 & 0,53991 \\ -0,53991 & 0,85149 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2,2361 \times 10^{-3} \\ 8,1293 \times 10^{-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,2361 \times 10^{-3} \\ 8,1293 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

Comme le chasseur et sa cible sont sur la même orbite ($\delta \mathbf{v}_0^- = \mathbf{0}$) donc

$$\Delta \mathbf{v}_0 = \delta \mathbf{v}_0^+ - \delta \mathbf{v}_0^- = -2,2361 \mathbf{i} + 8,1293 \mathbf{j} \text{ (m/s)}$$

et le Δv initial vaut donc $\|\Delta \mathbf{v}_0\| = 8,4313$ m/s. À la fin de la manœuvre de rendez-vous $\delta \mathbf{v}_f^+ = \mathbf{0}$ ce qui conduit à

$$\Delta \mathbf{v}_f = \delta \mathbf{v}_f^+ - \delta \mathbf{v}_f^- = -2,2361 \mathbf{i} - 8,1293 \mathbf{j} \text{ (m/s)}$$

et le Δv final vaut donc $\|\Delta \mathbf{v}_f\| = 8,4313$ m/s. La trajectoire dans le référentiel de Clohessy-Wiltshire est représentée sur la figure suivante

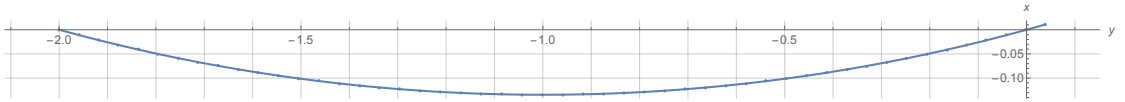


FIGURE 8. Trajectoire du chasseur dans le référentiel de la cible ; les distances sont exprimées en km. Sans la seconde impulsion, la capsule poursuit son mouvement au-delà de la cible.

Le Δv requis est un peu élevé au regard de ce que peuvent produire les rétrofusées d'atterrissage d'une capsule Soyuz, prévues pour amortir le choc du contact avec le sol. Lors de la descente, le parachute principal a ralenti la vitesse jusqu'à environ 7 m/s et les rétrofusées se déclenchent à 1,5 m du sol : leur Δv maximum est donc de l'ordre de 5 m/s. Et même si les rétrofusées étaient suffisantes pour amorcer la poursuite, il ne faut pas oublier de bien diriger leur poussée ! Quant à l'usage d'un extincteur, l'idée est bonne mais la réalisation pratique est impossible. La vitesse d'éjection du gaz ne doit pas dépasser 30 m/s et la masse de gaz éjecté est de l'ordre de 5 kg. L'incrément de vitesse que Stone peut obtenir avec ce procédé est de l'ordre d'1 m/s, totalement insuffisant pour sa manœuvre finale. Sans parler des problèmes de maîtrise de la direction de la poussée produite par le gaz...

REFERENCES

- [1] Clohessy W. H. & Wiltshire R. S., *Terminal Guidance for Satellite Rendezvous*, J. Aerospace Sciences 27, 653-658 (1960).
- [2] Hohmann W., *The Attainability of Heavenly Bodies*, traduction de l'article original de 1925 dans NASA Technical Translation F-44 (1960).
- [3] Jezewski D. J. & Donaldson J. D., *An Analytic Approach to Optimal Rendezvous Using Clohessy-Wiltshire Equations*, J. Astronautical Sciences 27, 293-310 (1979).
- [4] Problème Physique 2 du concours Centrale-Supélec, Automated transfer vehicle, 2014.
<https://www.concours-centrale-supelec.fr/CentraleSupelec/2014/PC/sujets/2012-017.pdf>